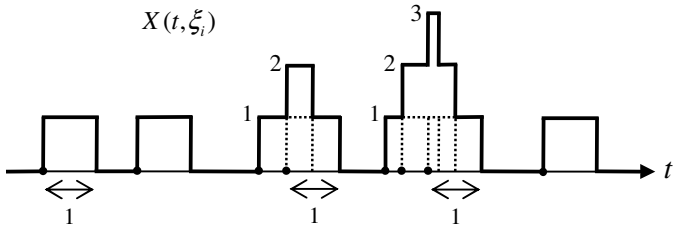
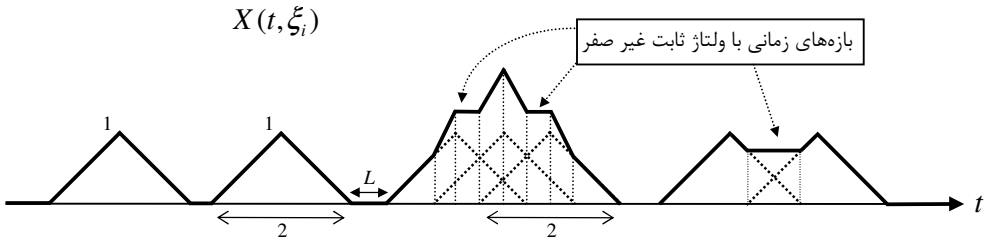
مسائل سری سوم درس فرایندهای اتفاقی

۱- فرآیند تصادفی $X(t)$ مرکب است از پالس‌هایی با عرض ۱ و ارتفاع ۱ که به‌طور تصادفی در زمان پراکنده هستند. زمان شروع پالس‌ها را نقاط پواسن تشکیل می‌دهند. یک تابع نمونه از فرآیند در شکل زیر نشان داده شده است. تابع متوسط $m_X(t)$ و تابع همبستگی $R_X(t_1,t_2)$ و طیف قدرت $S_X(f)$ و قدرت P_X را به‌دست آورید. دانسیته نقاط پواسن را λ و مستقل از زمان در نظر بگیرید.



۲- فرآیند تصادفی $X(t)$ از پالسهاای مثلثی شکل با قاعدهٔ ۲ و ارتفاع ۱ تشکیل شده است. زمان شروع این پالسها را نقاط پواسن با چگالی ثابت λ تشکیل می‌دهند. یک تابع نمونه از فرآیند در شکل زیر نشان داده شده است.



الف) تابع متوسط $m_X(t)$، تابع همبستگی $R_X(t_1,t_2)$، طیف قدرت $S_X(f)$ و قدرت متوسط P_X فرایند را به‌دست آورید.

ب) احتمال اینکه در یک همسایگی از زمان $t=t_0$، مقدار فرآیند ثابت و غیر صفر باشد چقدر است؟

پ) چگالی احتمال طول بازه‌های زمانی که مقدار فرآیند در آن‌ها صفر است (L) و متوسط این طول را به دست آورید.

۳- برای فرآیند تصادفی ساکن مختلط $X(t)$ با تابع همبستگی $R(\tau)$، نشان دهید اگر $R(0)=|R(T_0)|$، آن‌گاه:

$$R(\tau)=e^{j\omega_o\tau}w(\tau) \qquad X(t)=e^{j\omega_o t}Y(t)$$

که در آن $w(\tau)$ یک تابع پریودیک با پریود T_0 و $Y(t)$ یک فرآیند پریودیک به مفهوم MS با همان پریود است.

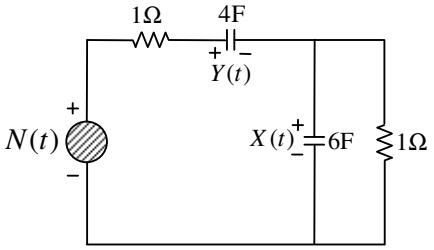
۴- در این مساله چگالی نقاط پواسون را به‌صورت تابع $\lambda=a\cos^2(\omega_0 t)$ در نظر بگیرید.

الف) ممان‌های مرتبهٔ اول و دوم فرآیند پواسن با فضای پارامتر $t\in[0,\infty)$ را به‌دست آورید.

ب) ممان‌های اول و دوم فرآیند ضربه‌های پواسن با فضای پارامتر $t\in(-\infty,\infty)$ را به‌دست آورید و ساکن یا ساکن دوری بودن آن را مشخص نمایید.

پ) طیف قدرت فرآیند ضربه‌های پواسن را تعیین کنید.

۵- در شکل زیر $N(t)$ یک فرآیند سفید با تابع همبستگی $R_X(\tau)=\delta(\tau)$ است. ولتاژ دو سر خازن‌ها را فرآیندهای $X(t)$ و $Y(t)$ می‌نامیم.



الف) طیف قدرت فرآیند $X(t)$ و طیف قدرت متقابل فرآیندهای $X(t)$ و $Y(t)$ را پیدا کنید.

ب) قدرت متوسط فرآیند $Y(t)$ چقدر است؟

پ) ضریب همبستگی متغیرهای تصادفی $X(1)$ و $Y(1)$ را محاسبه کنید.

۶- فرض کنید $X(t)$ یک فرآیند نرمال با متوسط ۱ و تابع کواریانس $C_X(\tau)=\exp(-\frac{\tau^2}{2})$ است. مشتق این فرآیند را $X'(t)$ می‌نامیم.

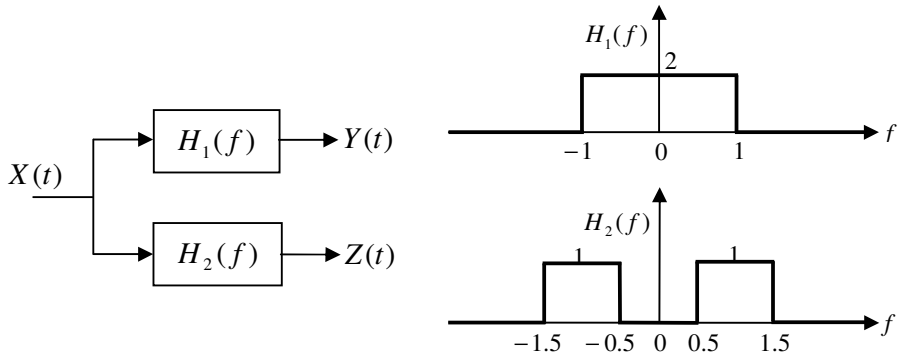
الف) ماتریس همبستگی بردار سه‌بعدی متشکل از متغیرهای تصادفی $X(t_0)$، $X'(t_0)$ و $X'(t_0-1)$ را محاسبه کنید.

ب) طیف قدرت فرآیند $X'(t)$ و طیف قدرت متقابل دو فرآیند $X(t)$ و $X'(t)$ را پیدا کنید.

پ) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی $X(t)$ و $X'(t)$ را پیدا کنید.

ت) متغیرهای تصادفی $X'(t_1)$ و $X'(t_2)$ به ازای چه مقادیری از t_1 و t_2 مستقل از هم هستند و چرا؟

۷- فرض کنید $X(t)$ یک فرآیند نرمال ساکن با تابع متوسط $m_X=2$ و کواریانس $C_X(\tau)=\delta(\tau)$ است. این فرآیند را به‌طور همزمان به دو فیلتر LTI با تابع تبدیل‌های $H_1(f)$ و $H_2(f)$ نشان داده شده در شکل زیر اعمال کرده‌ایم و خروجی‌های آن‌ها را فرآیندهای $Y(t)$ و $Z(t)$ می‌نامیم.



الف) تابع چگالی احتمال $Y_1=Y(t_1)$ و $Z_1=Z(t_1)$ و همچنین تابع چگالی احتمال توأم Y_1 و Z_1 را به‌دست آورید.

ب) به‌ازای چه مقادیری از t_1 و t_2 متغیرهای تصادفی $Y_1=Y(t_1)$ و $Z_2=Z(t_2)$ مستقل می‌گردند و چرا؟

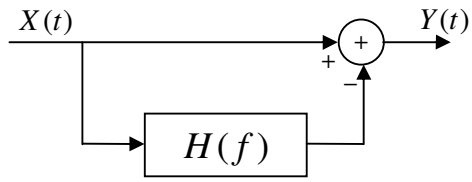
۸- یک فرآیند WSS، با طیف قدرت $\omega=2\pi f$ ، $S_X(f)=\dfrac{4\omega^2+900}{\omega^4+450\omega^2+3969}$ را درنظر بگیرید.

الف) تابع همبستگی فرآیند، $R_X(\tau)$، را به‌دست آورید.

ب) متوسط و واریانس هر یک از متغیرهای تصادفی فرآیند چقدر است؟ ضریب همبستگی بین دو متغیر تصادفی به فاصلهٔ 0.01 ثانیه در این فرآیند چقدر است؟

پ) یک فیلتر علی پیدا کنید که این فرآیند را به فرآیند $Y(t)$ با تابع همبستگی $R_Y(\tau)=e^{-3|\tau|}$ تبدیل کند. رابطهٔ $Y(t)$ بر حسب $X(t)$ را نیز بنویسید.

۹- در شکل زیر، ورودی یک فرایند نرمال با تابع متوسط $m_X(t)=0$ و تابع همبستگی $R_X(\tau)=e^{-|\tau|}$ است. $H(f)$ نیز پاسخ فرکانسی یک فیلتر پایین‌گذر بوده و تابعی حقیقی است. میدانیم $X(t)$ و $Y(t)$، فرایند های ورودی و خروجی، از نظر کلیه خصوصیات آماری دقیقا مثل هم هستند و متغیرهای تصادفی $X(t_0)$ و $Y(t_0)$ به‌ازای هر t_0 از یکدیگر مستقلند، $H(f)$ را بیابید.



۱۰- سیستمی با تابع تبدیل $H(f)=\dfrac{1}{-4\pi^2 f^2+j4\pi f+5}$ در نظر بگیرید. فرض کنید ورودی سیستم فرآیند ساکنی با قدرت $P_X=1$ است. تابع همبستگی ورودی را به‌قسمی تعیین کنید که قدرت خروجی، P_y، ماکزیمم شود.

۱۱- طیف قدرت فرآیند ساکن $X(t)$ در دست است: $S_X(f)=\dfrac{(2\pi f-1)^2}{(2\pi f)^2+1}$.

الف) تابع همبستگی و تابع کواریانس فرآیند را به‌دست آورید.

ب) فرآیند $X(t)$ را به‌صورت رابطه‌ای خطی و علی برحسب یک فرآیند سفید $W(t)$ بیان کنید.

۱۲- فرآیند $X(t)=A\cos(\omega_0 t)+N(t)$ که در آن مقادیر A و ω_0 ثابت و $R_N(\tau)=N_0\delta(\tau)$ است، ورودی سیستمی با تابع تبدیل $H(f)=\dfrac{1}{\alpha+j2\pi f}$ می‌باشد. اگر خروجی سیستم $Y(t)=B\cos(\omega_0 t+\varphi)+Y_N(t)$ باشد که در آن $Y_N(t)$ پاسخ سیستم به $N(t)$ است، مقدار α را به نحوی انتخاب کنید که نسبت سیگنال به نویز خروجی $\dfrac{S}{N}=\dfrac{|B|^2}{E\{Y_N^2(t)\}}$ ماکزیمم شود.

۱۳- نشان دهید اگر $R_X(\tau)=e^{-c|\tau|}$ باشد، در این‌صورت بسط K-L فرآیند $X(t)$ در فاصلهٔ $t\in(-a,a)$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{X}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n b_n\cos(\omega_n t)+\beta'_n b'_n\sin(\omega'_n t))$$

که در آن:

$$\tan(a\omega_n)=\frac{c}{\omega_n}\quad,\quad \cot(a\omega'_n)=\frac{-c}{\omega'_n}\quad,\quad \beta_n=(a+\frac{\lambda_n}{2})^{-1/2}\quad,\quad \beta'_n=(a-\frac{\lambda'_n}{2})^{-1/2}$$

$$E[b_n^2]=\lambda_n=\frac{2c}{c^2+\omega_n^2}\quad,\quad E[b_n'^2]=\lambda'_n=\frac{2c}{c^2+\omega_n'^2}$$